1.6 极限存在准则 — 两个重要极限

1.6.1 两边夹准则（夹逼准则，迫敛性）

1.6.2 单调有界准则

1.6 极限存在准则---两个重要极限

1.6.1 两边夹准则

定理1.6.1 设数列x_n、y_n、z_n满足条件：

$$(1)\ y_n \le x_n \le z_n,\ (n=1,2,\cdots)$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} y_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

则数列x_n的极限存在，且有$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

收敛数列的保序性： 若$z_n \ge y_n$，而$\lim_{n\to\infty} z_n = a$，$\lim_{n\to\infty} y_n = b$，则$a \ge b$.

定理1.6.1 设数列x_n、y_n、z_n满足条件：

(1) $y_n \le x_n \le z_n, (n=1,2,\cdots)$ (2) $\lim_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

则数列x_n的极限存在，且有 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

证 $\because \lim_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$

$\exists N_1$ 当$n > N_1$时 $|y_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$

$\exists N_2$ 当$n > N_2$时 $|z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow z_n < a + \varepsilon$

$\therefore$ 取$N = \max\{N_1, N_2\}$,当$n > N$时，恒有

$a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$ 即$|x_n - a| < \varepsilon$ $\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a$ 。

注：(1) 利用两边夹准则求极限关键是构造出y_n与z_n,并且y_n与z_n的极限是容易求的.

(2) 条件(1) 可改为：$\exists N_0$，$\forall n > N_0$成立 $y_n \le x_n \le z_n$

例1 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

解 由于 $\frac{i}{n^2+n+n}\le\frac{i}{n^2+n+i}\le\frac{i}{n^2+n+1}\quad(1\le i\le n)$

故

$$\frac{n(n+1)/2}{n^2+2n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\to\frac{1}{2}$$

$$\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

$$\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{n(n+1)/2}{n^2+n+1}\to\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$$

定理1.6.2 (函数的两边夹准则)

设函数 $f(x), g(x), h(x)$满足条件

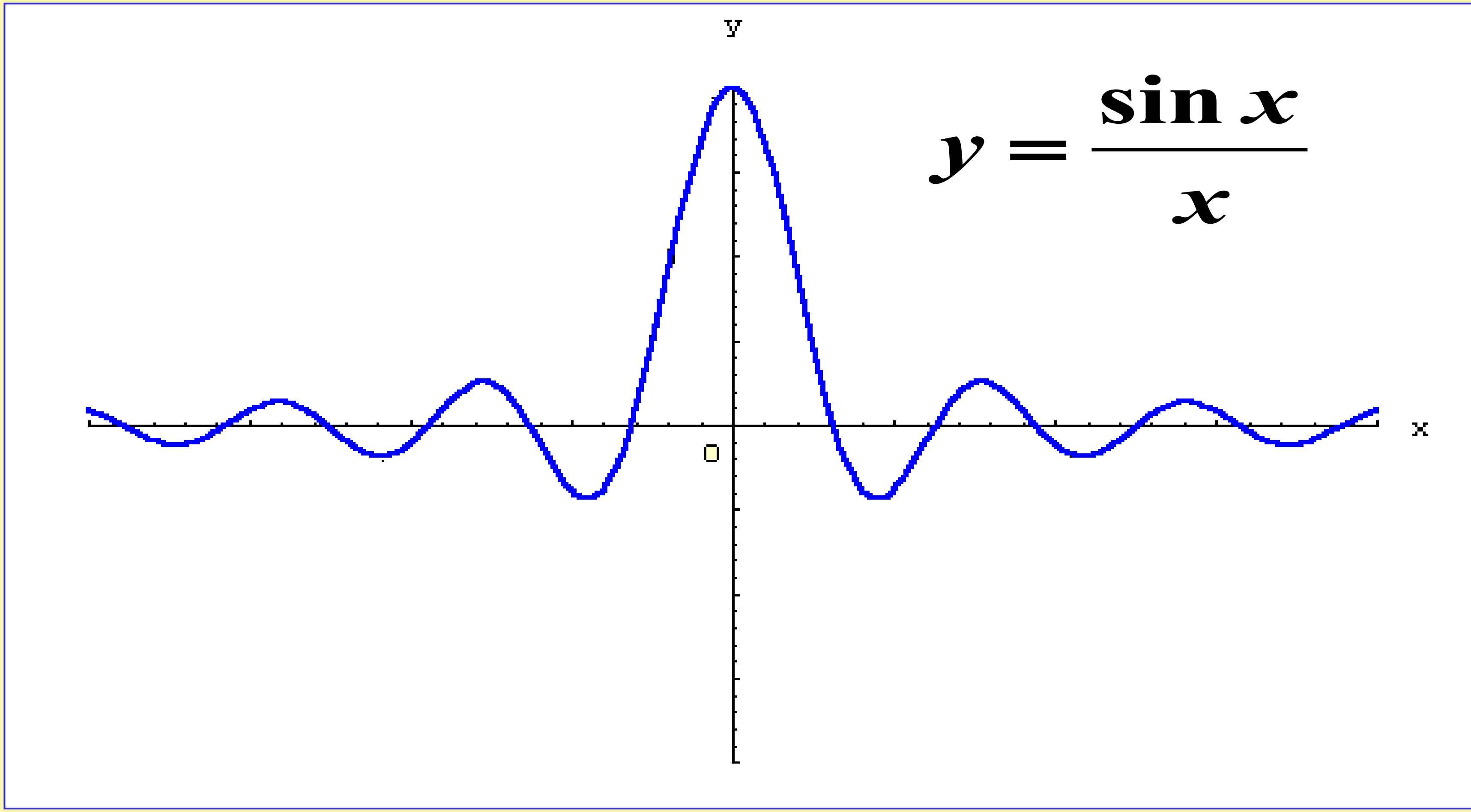
(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$, $x \in U^0(x_0)$ (或$|x| > X$)

(2) $\lim g(x) = A$, $\lim h(x) = A$

则函数$f(x)$的极限存在，且有 $\lim f(x) = A$.

极限的趋向，可以是任何情形，只要是同一过程。

定理1.3.5　推论4（保序性） 若$h(x) \ge g(x)$, 而 $\lim h(x) = a$, $\lim g(x) = b$, 则 $a \ge b$.

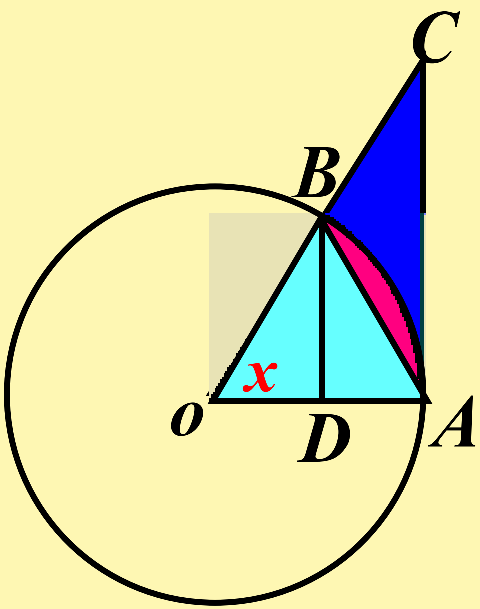


$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

下证： $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

例1 证明: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$x\to 0$: 可假设 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$



设单位圆 O, 圆心角 $\angle AOB = x$, $(0<x<\frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得 ΔACO.

ΔOAB 的高为 BD,

于是有 $\sin x = BD$, $x =$ 弧 AB, $\tan x = AC$,

$$S_{\text{三角形}OAB} < S_{\text{扇形}OAB} < S_{\text{三角形}OAC}$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\sin x<x<\tan x$　　当$-\frac{\pi}{2}<x<0$时，

$\Rightarrow 0<-x<\frac{\pi}{2}$　$\Rightarrow \sin(-x)<-x<\tan(-x)$

$\Rightarrow 0>\sin x>x>\tan x$　　$0<|x|<\frac{\pi}{2}\Rightarrow|\sin x|<|x|$

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，　或当$-\frac{\pi}{2}<x<0$时，

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$时，$0<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{2}$，

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，　又$\because \lim\limits_{x\to 0}1=1$，　$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

例2 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{\sin x}$$

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=5$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

1.6.2 单调有界收敛准则

如果数列 x_n 满足条件

$x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots,$ 单调增加

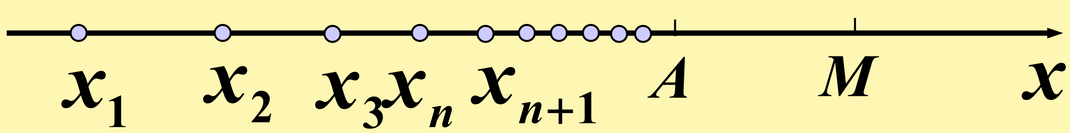
$x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots,$ 单调减少

} 单调数列

定理1.6.3(单调有界收敛准则) 单调有界数列必有极限.

（1）单调增加有上界，（2）单调减少有下界

几何解释:



证明详见华东师范大学数学系编《数学分析》

例3 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 用归纳法可证$x_{n+1}>x_n>0$, $\therefore \{x_n\}$是单调递增的

又$\because x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$,

$\therefore \{x_n\}$是有上界的; $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

$\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$, $x_{n+1}^2=3+x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

$A^2=3+A$, 解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

例4 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828\cdots$;

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

证 (1) 设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$， $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\because a_1a_2\cdots a_{n+1} \le \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \quad (a_i \ge 0)$$

$$\therefore x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1 \le \left(\frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=x_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)>x_n$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left(\frac{(n+1)\dfrac{n}{n+1}+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

$\therefore y_{n+1}\le y_n$ $\therefore\{x_n\}$单调递增，$\{y_n\}$单调递减,

$2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在(记为$e$)

且 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=x_n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=y_n$

下证 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 记 $[x]=n$, 则 $n \le x < n+1$, 有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

而 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e$$

由两边夹准则得 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

当$x\to-\infty$时，若令$t=-x$，则$x\to-\infty$时，$t\to+\infty$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right]$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e$$

这里令$u=t-1=-x-1$ 不妨直接令$t=-(x+1)$，

即：$x=-(t+1)$则$x\to-\infty$时，$t\to+\infty$

当$x \to -\infty$时,令$x = -(t+1)$,则$x \to -\infty$时,$t \to +\infty$

$$\therefore \lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t \to +\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{(t+1)}$$

$$= \lim_{t \to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)\right] = \lim_{t \to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t \to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e$$

综上有 $\lim_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

例5 证明: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

证 令 $x=\frac{1}{y}$, 则 $x\to 0$ 等价于 $y\to\infty$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y}=e$$

例6 求(1) $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$ 　　1^{∞}型

解 令 $x=-t$, $x\to\infty, t\to\infty$

$$\text{原式}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^{t}}=\frac{1}{e}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$ 解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x \quad (k\neq 0)$

解 令 $t=\dfrac{k}{x}$, $x\to\infty, t\to 0.$

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right]^k=e^k$

或：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}\cdot k}=\left[\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u\right]^k=e^k$

小结 (1) "$\frac{0}{0}$型"： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$

(2) "1^{∞}型"： $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y}=e$

一般地， $\lim\limits_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v}=\lim\limits_{u\to 0}\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}=e$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\tan x\right)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\tan x\right)^{\frac{1}{\tan x}}$

解 令$u=\tan x$,则当$x\to 0$时,$u\to 0$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$